Criteris específics de correcció i qualificació per ser fets púbics un cop finalitzades les proves **Matemàtiques aplicades a les cc. ss.**

SÈRIE 1

RECORDEU:
- Podeu valorar amb tants decimals com considereu convenient, però aconsellem no fer-ho en més de dos decimals.
- Cal arrodonir a un decimal la nota final de l'examen, no les notes parcials.
- Cal traslladar la puntuació de cada pregunta a la casella **amb el número corresponent** de la primera pàgina de l'examen.

---

1. En un estudi de mercat, 500 participants han tastat tres cafès diferents, presentats com a producte A, producte B i producte C, i han escollit quin dels tres els ha agradat més. Sabem que el producte B ha estat escollit pel doble de persones que el producte A i que el producte B l'han escollit 32 persones més que els productes A i C junts. Calculeu quantes persones han escollit cada producte. *[2 punts]*

Considerem les variables x, y i z, que representen el nombre de participants que escullen el producte A, B i C, respectivament.

Obtenim el sistema d'equacions següent

$$\begin{cases} x + y + z = 500 \\ y = 2x \\ y = x + z + 32 \end{cases}$$

que podem reescriure com

$$\begin{cases} x + y + z = 500 \\ 2x - y = 0 \\ x - y + z = -32 \end{cases}$$

Apliquem per resoldre'l el mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 500 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -32 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 500 \\ 0 & 3 & 2 & 1.000 \\ 0 & 2 & 0 & 532 \end{array}\right).$$

Es veu clarament que és suficient intercanviar la segona i la tercera columnes per tenir la matriu diagonalitzada i, per tant, podem concloure que és un sistema compatible determinat. En la resolució s'obté $x = 133$, $y = 266$ i $z = 101$.

Criteris de correcció: Plantejament del sistema: 0,75 p. Resolució del sistema: 1 p. Obtenció de la solució final: 0,25 p.

---

2. Resoleu les qüestions següents:

a) Considereu la matriu $\boldsymbol{M}=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 2 & -1\end{pmatrix}$. Calculeu els valors de a i b per tal que es verifiqui la igualtat $\boldsymbol{M}^2+a\cdot\boldsymbol{M}+b\cdot\boldsymbol{I}=\boldsymbol{0}$, en què $\boldsymbol{I}$ és la matriu identitat $\boldsymbol{I}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ i $\boldsymbol{0}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ és la matriu nul·la. *[1 punt]*

b) Considereu la matriu $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$. Trobeu totes les matrius $\boldsymbol{B}$ que commuten amb la matriu $\boldsymbol{A}$, és a dir, que compleixen que $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}$. *[1 punt]*

a) Comencem calculant M^2:

$$M^2=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 5\\ 2 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}14 & 5\\ 2 & 11\end{pmatrix}.$$

Per tant, tenim el sistema:

$$\begin{pmatrix}14 & 5\\ 2 & 11\end{pmatrix}+a\cdot\begin{pmatrix}2 & 5\\ 2 & -1\end{pmatrix}+b\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Que ens dona el sistema d'equacions següent:

$$\begin{cases}14+2a+b=0\\ 5+5a=0\\ 2+2a=0\\ 11-a+b=0\end{cases}$$

Tant de la segona com de la tercera equacions deduïm que $a=-1$, i substituint el valor de a, tant a la primera com a la quarta equació, obtenim que $b=-12$.

b) Hem de trobar els valors de x, y, z i t per als quals es compleix que

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x & y\\ z & t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}.$$

Si fem els dos productes cal que es compleixi la igualtat:

$$\begin{pmatrix}z & t\\ x-z & y-t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y & x-y\\ t & z-t\end{pmatrix}.$$

Per tant, cal que $z=y$, $t=x-y$, $x-z=t$ (però com que $z=y$, tornem a obtenir que $t=x-y$) i $y-t=z-t$ (que ens torna a donar que $z=y$).

Per tant, les úniques condicions que hem obtingut són $z=y$ i $t=x-y$. És a dir, la matriu A commutarà amb totes les matrius de la forma

$$\begin{pmatrix}x & y\\ y & x-y\end{pmatrix},$$

per a qualsevol valor de x i de y.

Criteris de correcció: a) Càlcul de M^2: 0,25 p. Obtenció de les equacions: 0,25 p. Obtenció dels valors de a i b: 0,5 p. b) Plantejament: 0,25 p. Càlcul dels productes de matrius: 0,25 p. Obtenció del sistema: 0,25 p. Obtenció de la solució final: 0,25 p.

3. La gràfica de la funció $f(x) = ax + b + \frac{8}{x}$ passa pel punt (-2, -6) i la recta tangent en aquest punt és paral·lela a l'eix d'abscisses.
   a) Calculeu el valor de a. *[1 punt]*
   b) Calculeu el valor de b. *[1 punt]*

a) Sabem que la recta tangent en el punt (-2, -6) és paral·lela a l'eix d'abscisses, per tant, el seu pendent és 0. Calculem la derivada de la funció

$$f'(x) = a - \frac{8}{x^2}.$$

Per tant, $f'(-2) = a - 2$. Imposem que $f'(-2) = 0$ i trobem que $a = 2$.

b) Sabem que la funció passa pel punt (-2, -6). Per tant, sabem que $f(-2) = -6$. Tenim per tant que $2\cdot(-2) + b + \frac{8}{(-2)} = -6$, que ens dona $b - 8 = -6$ i, finalment, $b = 2$.

Criteris de correcció: a) Càlcul de la derivada: 0,25 p. Saber que el pendent ha de ser 0: 0,25 p. Obtenció del valor de a: 0,5 p. b) Plantejament: 0,5 p. Obtenció del valor de b: 0,5 p.

---

4. La funció $f(x) = \frac{40}{x^2-22x+125}$ ens mostra aproximadament la venda diària, en milers d'unitats, d'un perfum de moda en funció de x, en què x és el dia del mes de febrer.

   a) Quantes unitats de perfum es van vendre, aproximadament, el dia 5 de febrer? Quin és l'increment de vendes entre el dia 7 i el dia 9 de febrer? *[0,75 punts.]*

   b) Quin dia del mes de febrer es van vendre més perfums i quantes unitat se'n van vendre? *[1,25 punts.]*

a) D'una banda $f(5) = 1$. Per tant, el dia 5 de febrer es van vendre, aproximadament, 1.000 unitats de perfum.

D'altra banda, $f(7) = 2$ i $f(9) = 5$. Per tant, entre el dia 7 i el dia 9 hi ha un increment aproximat de vendes de 3.000 unitats de perfum.

b) Per trobar el màxim de vendes, cal fer la derivada:
$f'(x) = \frac{-40\cdot(2x-22)}{(x^2-22x+125)^2}$.

Si igualem la derivada a zero, trobem que hi ha un possible extrem relatiu en $x = 11$. Si fem un estudi del signe de la derivada, observem que, per a x menor d'11, la derivada és positiva, i, per tant, la funció creix, mentre que per a x més gran d'11, la derivada és negativa, i, per tant, la funció decreix. Deduïm, per tant, que en $x = 11$ hi ha un màxim.

Observem que $f(11) = 10$. Per tant, el dia que es van vendre més perfums va ser el dia 11 de febrer i se'n van vendre aproximadament 10.000 unitats.

Criteris de correcció: a) Càlcul de les vendes del dia 5: 0,25 p. Càlcul de les vendes dels dies 7 i 9 i càlcul de l'increment de vendes entre aquests dies: 0,5 p. b) Càlcul de la derivada: 0,5 p. Obtenció del punt on s'assoleix el màxim: 0,25 p. Justificació que es tracta d'un màxim: 0,25 p. Obtenció del valor de vendes d'aquest dia: 0,25 p.

---

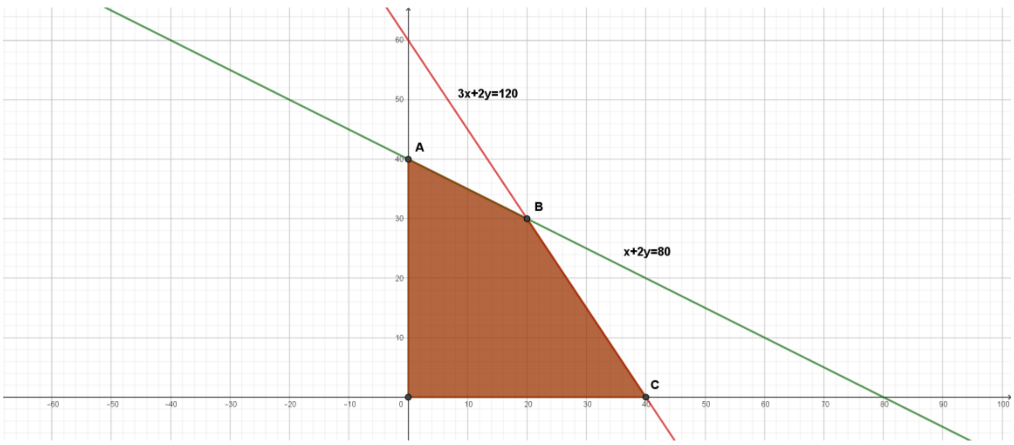
5. En una fàbrica es disposa de 80 kg d'acer i 120 kg d'alumini per fabricar bicicletes de muntanya i de passeig que es vendran a 200 € i 150 €, respectivament. Per a fabricar una bicicleta de muntanya són necessaris 1 kg d'acer i 3 kg d'alumini, i per a fabricar-ne una de passeig, 2 kg de cada un dels dos metalls.
   a) Determineu la funció objectiu i les restriccions, i dibuixeu la regió factible. *[1,25 punts]*
   b) Calculeu quantes bicicletes de cada tipus s'han de fabricar per a obtenir el màxim benefici i digueu quin és aquest benefici. *[0,75 punts]*

Segons l'enunciat el sistema d'inequacions és

$$\begin{cases} x + 2y \leq 80 \\ 3x + 2y \leq 120 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

on x representa el nombre de bicicletes de muntanya que cal fabricar i y el nombre de bicicletes de passeig.

La regió del pla solució del sistema d'inequacions és:



Es tracta d'una regió tancada del pla amb vèrtexs als punts $A = (0,40)$, $B = (20,30)$, $C = (40,0)$ i $D = (0,0)$.

La funció que dona el benefici és: $B(x, y) = 200x + 150y$.

El màxim s'assoleix en un dels vèrtexs de la regió solució. Si avaluem la funció anterior en cada un dels vèrtexs:

$B(0{,}0) = 0$
$B(0{,}40) = 6.000$
$B(20{,}30) = 8.500$
$B(40{,}0) = 8.000$

Per tant, el benefici màxim és de 8.500 € i s'obté si es fabriquen 20 bicicletes de muntanya i 30 de passeig.

Criteris de correcció: a) Càlcul de les restriccions: 0,5 p. Dibuix de la regió factible: 0,5 p. Obtenció de la funció objectiu: 0,25 p. b) Obtenció dels vèrtexs: 0,25 p. Obtenció del punt en què s'assoleix el màxim: 0,25 p. Obtenció del benefici màxim: 0,25 p.

---

6. Una botiga obre al públic des de les 10 hores fins a les 21 hores. Se sap que els ingressos per vendes, en funció de l'hora del dia, venen donats per la funció:

$$I(t) = -5(m-t)^2 + n,$$
per a $10 \leq t \leq 21$

a) Trobeu el valor de m sabent que els ingressos màxims es produeixen a les 18 hores.
[1 punt]
b) Trobeu el valor de n sabent que a les 21 hores hi ha uns ingressos de 500 €.
[1 punt]

a) La derivada de la funció $I(t)$ ve donada per $I'(t) = -10(m-t)(-1) = 10(m-t)$. Sabem que en $t = 18$ hi ha un extrem relatiu, per tant, $I'(18) = 0$, és a dir, $10(m-18) = 0$, i obtenim que $m = 18$.

b) També sabem que $I(21) = -5(18-21)^2 + n = 500$, i, per tant, obtenim que $n = 545$.

Criteris de correcció: a) Càlcul de la derivada: 0,5 p. Igualació del valor de la derivada en el punt t = 18 a 0: 0,25 p. Obtenció del valor de m: 0,25 p. b) Plantejament: 0,5 p. Obtenció del valor de n: 0,5 p.
