Sèrie 1

Responeu a QUATRE de les sis qüestions següents. En les respostes, expliqueu sempre què voleu fer i per què.

Cada qüestió val 2,5 punts.

Criteris generals per a la correcció:

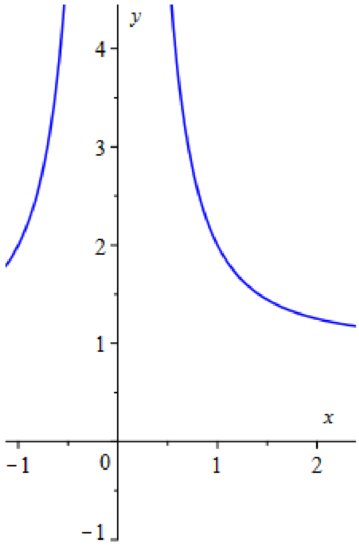
1. En tots els casos la resolució que fa l'estudiant s'ha de poder seguir i comprendre els passos que fa. **Aquelles respostes, parcials o totals, que no estiguin desenvolupades o no es pugui seguir el com s'ha arribat a donar la resolució seran puntuades amb 0 punts.**
2. La resolució proposada és, en alguns casos, una de les possibles i no és, en principi, única. Per tant, **sempre que l'enunciat ho permeti, en el cas que l'estudiant respongui amb una resolució alternativa totalment correcta se li assignarà el total de puntuació de l'apartat.** Si la resposta és parcial la puntuació obtinguda serà proporcional a la part corresponent de la puntuació total.
3. En alguns casos, la solució final pot admetre **expressions equivalents**. En aquests casos la puntuació serà la totalitat de la puntuació de l'apartat.
4. Tots els exercicis, apartats i passos dins d'un apartat es valoraran amb múltiples de 0,25 punts.
5. **Penalització per errades de càlcul o transcripció:**

- Si l'errada que es comet no té més transcendència, aleshores NO es descomptarà res de la puntuació parcial de l'apartat.
- En el cas que l'errada condueixi a derivacions paral·leles de l'enunciat, es valorarà i puntuarà el desenvolupament i coherència de la resolució resultant, i només s'aplicarà una penalització final de 0,25 punts.
- En cas que l'errada condueixi a no tenir sentit alguna de les qüestions que es demanen, aleshores la puntuació màxima de l'apartat serà de 0,75 punts.
- Si la resolució d'un apartat conté dues errades la puntuació de l'apartat serà l'acumulada fins al moment previ al cometre la segona errada.

1. Tracem la recta tangent a la funció $f(x)=\frac{1}{x^2}+1$ per un punt $P=\left(a,f(a)\right)$ del primer quadrant. Aquesta recta juntament amb els eixos de coordenades formen un triangle.

   a) Comproveu que l'àrea d'aquest triangle, en funció d'a,ve donada per la funció
   $$g(a)=\frac{\left(a^2+3\right)^2}{4a}.$$
   [1,25 punts]

   b) En quin punt P l'àrea del triangle és mínima? Calculeu aquest valor mínim.
   [1,25 punts]



Resolució:

a) La recta tangent a $y=f(x)$ en el punt d'abscisses $x=a$ és
$$y=f'(a)(x-a)+f(a).$$
Com que $f'(x)=\frac{-2}{x^3}$, l'equació de la recta tangent és
$$y=\frac{-2}{a^3}(x-a)+\frac{1}{a^2}+1\rightarrow y=\frac{-2}{a^3}x+\frac{a^2+3}{a^2}.$$
Els vèrtexs del triangle seran l'origen de coordenades i els talls de la recta tangent amb els eixos, que són:

Tall amb $x=0\rightarrow y=\frac{a^2+3}{a^2}\rightarrow\left(0,\frac{a^2+3}{a^2}\right)$

Tall amb $y=0\rightarrow 0=\frac{-2}{a^3}x+\frac{a^2+3}{a^2}\rightarrow x=\frac{a(a^2+3)}{2}\rightarrow\left(\frac{a(a^2+3)}{2},0\right)$

Així, l'àrea del triangle serà $g(a)=\frac{1}{2}\frac{a^2+3}{a^2}\frac{a(a^2+3)}{2}=\boxed{\frac{\left(a^2+3\right)^2}{4a}}$

b) Calculem els punts singulars de la funció $g(a)$ igualant la seva derivada a zero:
$$g'(a)=\frac{2(a^2+3)\cdot 2a\cdot 4a-\left(a^2+3\right)^2\cdot 4}{(4a)^2}=\frac{4(a^2+3)(\dots)}{16a^2}=\dots=\frac{3(a^2+3)(a^2-1)}{4a^2}=0,$$

$a^2=1\rightarrow a=\pm 1$ Prenem però només $a=1$ ja que el punt P és al primer quadrant.
Així el punt P té coordenades $\left(1,f(1)\right)=\boxed{(1,2)}$.

Es comprova que l'àrea és mínima perquè el signe de la funció g' (que és el de la part (a^2-1) perquè la resta de termes són positius) canvia en $a=1$:
a l'esquerra (per exemple, x = 0,9) és negatiu (i, per tant, la funció g és decreixent),
a la dreta (per exemple, x = 1,1) és positiu, (i, per tant, la funció g és creixent).
El valor de l'àrea mínima és $g(1)=\frac{(1+3)^2}{4}=\boxed{4\ u^2}$

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts pel plantejament.
   0,25 punts per l'expressió de la recta tangent.
   0,25 punts pels punts de tall amb l'eix OX.
   0,25 punts pels punts de tall amb l'eix OY.
   0,25 punts per la funció àrea.

b) 0,5 punts per la derivada primera.
   0,25 punts pel valor mínim i el punt P.
   0,25 punts per comprovar que és mínim relatiu.
   0,25 punts pel valor de l'àrea.

2. Considereu el sistema d'equacions lineals següent, que depèn del paràmetre real k:

$$\begin{cases} 5x + y + 4z = 19 \\ kx + 2y + 8z = 28 \\ 5x + y - kz = 23 + k \end{cases}$$

a) Discutiu el sistema per als diferents valors del paràmetre k.
[1,25 punts]

b) Resoleu, si és possible, el sistema per al cas $k = 0$.
[1,25 punts]

Resolució:

a) Escrivim el sistema en forma matricial.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 4 & 19 \\ k & 2 & 8 & 28 \\ 5 & 1 & -k & 23+k \end{array}\right)$$

Denotem per a A i A^* la matriu dels coeficients i l'ampliada, respectivament.

El determinant de la matriu A del sistema és:

$$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ k & 2 & 8 \\ 5 & 1 & -k \end{vmatrix} = k^2 - 6k - 40$$

Si igualem el determinant a 0 obtenim:

$$k^2 - 6k - 40 = 0 \to k = \frac{6 \pm \sqrt{36+160}}{2} = \frac{6 \pm 14}{2} \Longrightarrow k = 10; k = -4$$

Aleshores, podem considerar els següents tres casos:

- Si $k \neq 10, -4 \to \text{rang}(A) = \text{rang}(A^*) = 3 \to$ Sistema compatible determinat.
- Si $k = 10$, el sistema en forma matricial és:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 4 & 19 \\ 10 & 2 & 8 & 28 \\ 5 & 1 & -10 & 33 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 4 & 19 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & -14 & 14 \end{array}\right)$$

$\text{rang}(A) = 2;\ \text{rang}(A^*) = 3 \to$ Sistema incompatible.

Observació: El rang es pot justificar amb menors no nuls o bé directament es pot concloure la incompatibilitat a partir de la segona equació.

- Si $k = -4$, el sistema en forma matricial és:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 4 & 19 \\ -4 & 2 & 8 & 28 \\ 5 & 1 & 4 & 19 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & 4 & 19 \\ 0 & 7 & 28 & 108 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\text{rang}(A) = 2 = \text{rang}(A^*) < \text{núm. incògnites} = 3 \to$ Sistema compatible indeterminat amb 1 (=3-2) grau de llibertat (les solucions depenen d'un paràmetre lliure).

b) Per a $k = 0$, estem en el primer cas i sabem que es tracta d'un sistema compatible determinat, té solució única:

El sistema queda:

$$\begin{cases} 5x + y + 4z = 19 \\ 2y + 8z = 28 \\ 5x + y = 23 \end{cases}$$

Resolent el sistema per Gauss, o bé per Cràmer, obtenim la solució $\boxed{\begin{cases} x = 1 \\ y = 18 \\ z = -1 \end{cases}}$

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts per la presentació matricial del sistema.
0,25 punts pels primers passos per arribar als valors crítics per a la discussió.
0,75 punts per la discussió dels tres casos (0,25 punts per cada cas).

b) 0,25 punts per observar que té solució única.
0,25 punts per la concreció del sistema a resoldre.
0,75 punts per la solució (0,25 punts per cada incògnita).

3.

a) Calculeu l'equació general del pla π que passa pel punt $(8,8,8)$ i té vectors directors $\boldsymbol{u} = (1,2,-3)$ i $\boldsymbol{v} = (-1,0,3)$.
[1,25 punts]

b) Determineu el valor del paràmetre a perquè el punt $(1,-5,a)$ pertanyi al pla π i calculeu l'equació paramètrica de la recta que passa per aquest punt i és perpendicular al pla π.
[1,25 punts]

Resolució:

a) L'equació general del pla és:

$$\begin{vmatrix} x-8 & 1 & -1 \\ y-8 & 2 & 0 \\ z-8 & -3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 6x + 2z = 64 \rightarrow \boxed{3x + z = 32}.$$

Observació: Naturalment, també es donarà per bona la construcció de l'equació del pla a partir del vector normal del pla calculat com el producte vectorial dels dos vectors directors, o equivalent.

b) Perquè el punt $(1,-5,a)$ sigui del pla, ha de satisfer l'equació, per tant:

$$3 + a = 32 \rightarrow \boxed{a = 29}$$

Ens demanen la recta que passa pel punt $(1,-5,29)$ i té vector director el vector normal al pla, que és $(A,B,C) = (3,0,1)$. Així l'equació paramètrica de la recta demanada és:

$$\boxed{\begin{cases} x = 1 + 3t \\ y = -5 \\ z = 29 + t \end{cases} \quad \text{amb } t \in \boldsymbol{R}}$$

Pautes de correcció:

a) 0,5 punts pel plantejament.
0,25 punts pel desenvolupament.
0,5 punts per la solució.

b) 0,5 punts per calcular el valor de a.
0,25 punts per les coordenades del punt.
0,25 punts pel vector director.
0,25 punts per l'equació paramètrica de la recta.

Observació: Tot i que l'apartat a) pugui estar mal resolt, l'apartat b) és puntuarà correctament encara que el pla inicial no sigui correcte sempre que el procediment i càlcul siguin els adequats.

4. Considereu la funció $f(x) = \frac{ax^2+b}{x}$ en què a i b són dos paràmetres reals. Calculeu els valors de a i b de manera que la funció $f(x)$ tingui una asímptota obliqua de pendent 1 i un mínim en el punt de la gràfica amb abscissa $x = 2$
[2,5 punts]

Resolució:

Plantegem el límit per calcular el pendent de l'asímptota obliqua i l'igualem a 1:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+b}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(a + \frac{b}{x^2}\right) = \boxed{a = 1}$$

Així, la funció serà $f(x) = \frac{x^2+b}{x}$.

Perquè tingui un mínim en el punt d'abscissa $x = 2$, cal que la derivada s'anul·li en aquest punt:

$$f'(x) = \frac{2x^2-(x^2+b)}{x^2} = \frac{x^2-b}{x^2} \to f'(2) = \frac{4-b}{4} = 0 \to \boxed{b = 4}.$$

Finalment, confirmem que es tracta d'un mínim en $x = 2$ ja que:

$$f'(x) = \frac{x^2-4}{x^2}\begin{cases} > 0 & \text{si } x < -2 \to \quad f \text{ creixent} \\ \leq 0 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \to \quad f \text{ decreixent} \\ > 0 & \text{si } x > 2 \to \quad f \text{ creixent}\end{cases}$$

I, per tant, en el punt d'abscissa $x = 2$, la funció passa de decreixent a creixent i, per tant, presenta un mínim.

Pautes de correcció:

0,5 punts pel plantejament de límit per al pendent de l'A.O.
0,5 punts pel càlcul del valor de a.
0,5 punts per la derivada.
0,5 punts pel valor de b.
0,5 punts per justificar que és un mínim.

5. Sigui la matriu $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$.

a) Trobeu la matriu X que satisfà l'equació $AX = I - 3X$ en què I és la matriu identitat d'ordre 2.
[1,25 punts]

b) Comproveu que la matriu X és invertible i calculeu-ne la matriu inversa.
[1,25 punts]

Resolució:

a) La matriu incògnita X ha de ser quadrada d'ordre 2, en cas contrari no es podria operar l'equació donada. Aïllem X de la igualtat donada:

$$AX = I - 3X \to AX + 3X = I \to (A + 3I)X = I \to X = (A + 3I)^{-1}$$

Així ja podem calcular la matriu X:

$$X = (A + 3I)^{-1} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}^{-1} =$$

$$= \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}}$$

b) De la igualtat $(A + 3I)X = I$ podem deduir directament que la matriu X és invertible i que $A + 3I$ és la matriu inversa de la matriu X, així doncs:

$$X^{-1} = A + 3I = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}}$$

De forma alternativa, $\det(X) = -4 - (-3) = -1 \neq 0$ i, per tant, X és invertible i la matriu inversa serà:

$$X^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}^t = -\begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}}$$

Pautes de correcció:

a) 0,5 punts per l'expressió matricial de X.
0,75 punts pel càlcul efectiu de la matriu X.

Observació: La resolució que consisteix a plantejar la matriu X com a 4 paràmetres a determinar i la corresponent resolució del sistema d'equacions lineals 4x4 també es donarà per bona.

b) 0,5 punts per comprovar que la matriu X és invertible.
0,75 punts pel càlcul efectiu de la matriu inversa de X.

6. Considereu la funció $f(x) = x^3$.
   a) Calculeu en quin punt del tercer quadrant la recta tangent a $y = f(x)$ és paral·lela a la recta $3x - y = 4$. Calculeu l'equació de la recta tangent a la gràfica en aquest punt i feu un dibuix aproximat de la gràfica de la funció i les dues rectes.
   [1,25 punts]
   b) Calculeu l'àrea de la regió delimitada per $y = f(x)$ i la recta $y = 3x + 2$.
   [1,25 punts]

Resolució:

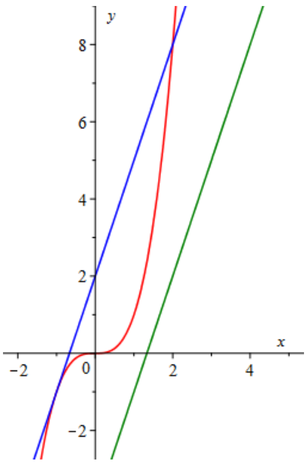
a) El pendent de la recta tangent a la funció $y = f(x)$ en el punt $(a, f(a))$ és $f'(a)$, que ha de ser igual al pendent de la recta $y = 3x - 4$, que és 3. Per tant,

$$f'(x) = 3x^2 \rightarrow f'(a) = 3a^2 = 3 \rightarrow$$
$$\rightarrow a^2 = 1 \rightarrow a = \pm 1$$

Així, el punt buscat és $(-1, f(-1)) = \boxed{(-1, -1)}$ ja que ha de ser del tercer quadrant.

La recta tangent en aquest punt és:

$$y = f'(-1)(x+1) + f(-1) \rightarrow \boxed{y = 3x + 2}$$



b) Per a calcular l'àrea compresa entre $y = x^3$ i $y = 3x + 2$, hem de calcular els seus punts de tall:

$$\begin{cases} y = x^3 \\ y = 3x + 2 \end{cases} \rightarrow x^3 = 3x + 2 \rightarrow x^3 - 3x - 2 = 0$$

Pel mètode de Ruffini es descompon el polinomi en factors primers i tenim:

$$x^3 - 3x - 2 = (x+1)^2(x-2) = 0 \rightarrow x = -1 \text{ i } x = 2$$

Així, l'àrea demanada es calcula amb la integral definida:

$$\int_{-1}^{2} (3x + 2 - x^3)dx = \left[3\frac{x^2}{2} + 2x - \frac{x^4}{4}\right]_{-1}^{2} = \boxed{\frac{27}{4}u^2}$$

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts pel plantejament i obtenir els valors possibles de a.
0,25 punts per triar el punt correcte en el tercer quadrant.
0,25 punts per la formulació de la recta tangent.
0,25 punts per l'equació de la recta tangent.
0,25 punts per la gràfica de la funció i les dues rectes.

b) 0,25 punts pel plantejament de l'àrea.
0,25 punts per calcular els punts d'intersecció de les dues gràfiques.
0,25 punts per plantejar la integral definida.
0,25 punts pel càlcul de la primitiva.
0,25 punts pel càlcul i resultat final.
Observació: Qualsevol subdivisió correcta de l'àrea demanada també serà donada per bona.