SÈRIE 3

Criteris generals per a la correcció:

1. En tots els casos, la resolució que fa l'estudiant s'ha de poder seguir, i s'han de comprendre'n els passos que fa. **Aquelles respostes, parcials o totals, que no estiguin desenvolupades o en les quals no es pugui seguir com s'ha arribat a donar la resolució seran puntuades amb 0 punts.**

2. La resolució proposada és, en alguns casos, una de les possibles i no és, en principi, única. Per tant, **sempre que l'enunciat ho permeti, en cas que l'estudiant respongui amb una resolució alternativa totalment correcta se li assignarà el total de puntuació de l'apartat**. Si la resposta és parcial, la puntuació obtinguda serà proporcional a la part corresponent de la puntuació total.

3. En alguns casos, la solució final pot admetre **expressions equivalents**. En aquests casos, la puntuació serà la totalitat de la puntuació de l'apartat.

4. Tots els exercicis, apartats i passos dins d'un apartat es valoraran amb múltiples de 0,25 punts.

5. **Penalització per errades de càlcul o transcripció:**

    - Si l'errada que es comet no té més transcendència, aleshores NO es descomptarà res de la puntuació parcial de l'apartat.

    - En cas que l'errada condueixi a derivacions paral·leles de l'enunciat, es valorarà i es puntuarà el desenvolupament i la coherència de la resolució resultant, i només s'aplicarà una penalització final de 0,25 punts.

    - En cas que l'errada condueixi al fet que alguna de les qüestions que es demanen no tingui sentit, aleshores la puntuació màxima de l'apartat serà de 0,75 punts.

    - Si la resolució d'un apartat conté dues errades, la puntuació de l'apartat serà l'acumulada fins al moment previ a cometre la segona errada.

1.

Resolució:

a) El pal estarà contingut en la recta que passa pel punt $P = (30, 1, 0)$ i que té per direcció el vector normal al pla del terra $\vec{n} = (1, 0, -1)$.

Per tant, l'equació paramètrica és:

$$\boxed{r: \begin{cases} x = 30 + k \\ y = 1 \\ z = -k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}}$$

b) Necessitem el punt $Q = r \cap \pi$, intersecció de la recta anterior amb el pla del terra. Si substituïm l'equació paramètrica de la recta en l'equació del pla, tenim:

$$30 + k - (-k) = 6 \Rightarrow 30 + 2k = 6 \Rightarrow k = -12.$$

El punt de la base serà: $\boxed{Q = (18,1,12)}$.

I la longitud del pal és:

$$d(P, Q) = \left\|\overrightarrow{PQ}\right\| = \|Q - P\| = \|(-12,0,12)\| = 12 \cdot \|(-1,0,1)\|$$
$$= 12 \cdot \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \boxed{12\sqrt{2} \text{ unitats de longitud}}$$

Observació: aquesta distància també es pot trobar calculant la distància del punt *P* al pla π.

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts per la identificació del vector normal del pla.

0,25 punts pels elements que defineixen la recta que conté el pal.

0,5 punts per l'equació paramètrica.

b) 0,5 punts pel plantejament de trobar la intersecció de la recta que conté el pal amb el pla del terra.

0,5 punts pel càlcul del punt.

0,5 punts pel càlcul de la norma del vector (o equivalent).

2.

Resolució:

a) La funció $f(x)$ és un quocient de polinomis. Per tant, el seu domini seran tots els nombres reals excepte aquells punts que anul·lin el polinomi denominador.

Si resolem $x^2+x-2=0$, obtenim $x=\frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}$ i, per tant, el denominador s'anul·la pels valors $x=-2$ i $x=1$.

Així doncs, tindrem: $\boxed{Dom(f)=(-\infty,-2)\cup(-2,1)\cup(1,+\infty)}$.

Asímptotes verticals: $x^2+x-2=(x+2)(x-1)=0$

$$x=-2 \quad \rightarrow \quad \lim_{x\to-2} f(x)=\frac{9}{0}=\infty \quad \Rightarrow \boxed{f(x) \text{ té asímptota vertical a } x=-2}$$

$$x=1 \quad \rightarrow \quad \lim_{x\to1} f(x)=\frac{9}{0}=\infty \quad \Rightarrow \boxed{f(x) \text{ té asímptota vertical a } x=1}$$

Asímptotes horitzontals:

$$\lim_{x\to\mp\infty} f(x)=\frac{9}{+\infty}=0 \quad \Rightarrow \boxed{f(x) \text{ té asímptota horitzontal a } x=0}$$

Asímptotes obliqües: com que la funció $f(x)$ té asímptota horitzontal, quan $x\to\mp\infty$ aleshores $\boxed{f(x) \text{ no té asímptotes obliqües.}}$

Màxims i mínims relatius: són els punts que anul·len la funció derivada.

$$f'(x)=\frac{-9(2x+1)}{(x^2+x-2)^2} \quad f'(x)=0? \Rightarrow -9(2x+1)=0 \Rightarrow 2x+1=0 \quad \Rightarrow \quad x=-\frac{1}{2}$$

Mitjançant el signe de la derivada primera, podem comprovar que a $\boxed{x=-\frac{1}{2} \text{ hi ha un màxim relatiu}}$, ja que abans la derivada és positiva ($f'(-1)>0$) i després és negativa ($f'(0)<0$).

Pel que fa a la monotonia de la funció, atès que la funció té discontinuïtats asimptòtiques, busquem quin signe té la derivada en els diferents intervals de continuïtat:

	$(-\infty,-2)$	$\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2},1\right)$	$(1,+\infty)$
f ‘	> 0	> 0	< 0	< 0
f	creixent	creixent	decreixent	decreixent

Per tant:

$\boxed{f(x) \text{ és creixent a } (-\infty,-2) \cup \left(-2,-\frac{1}{2}\right).}$

$\boxed{f(x) \text{ és decreixent a } \left(-\frac{1}{2},1\right) \cup (1,+\infty).}$

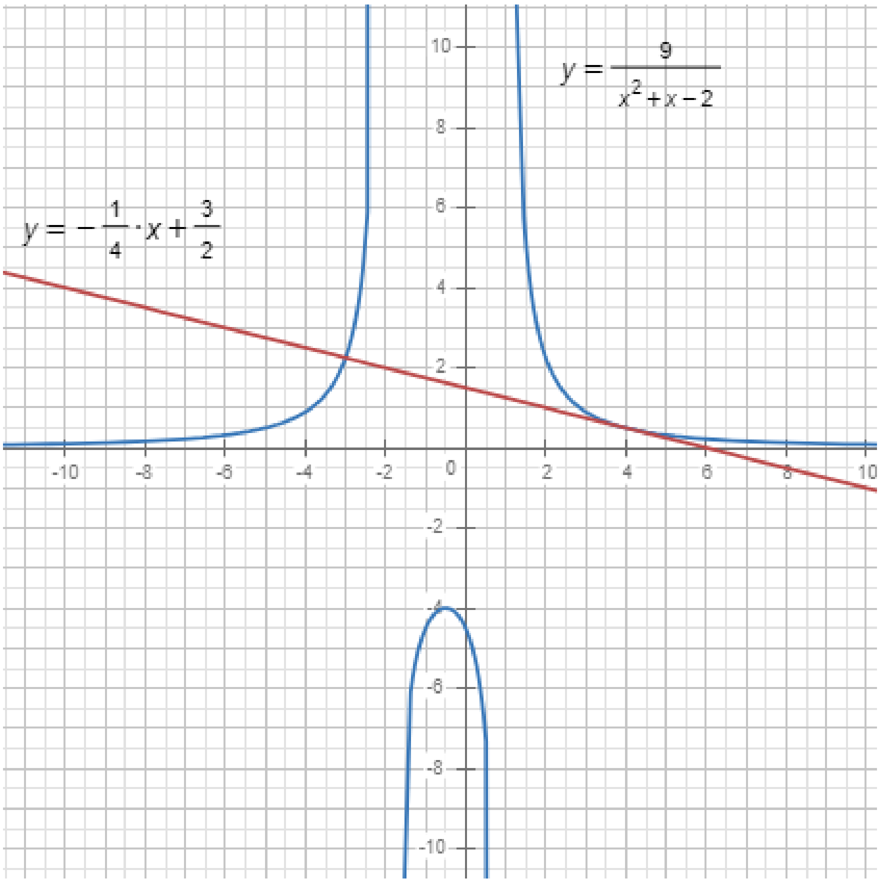
b) Per a calcular l'equació general de la recta tangent a la funció, fem servir la fórmula $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ per al cas $a = 4$.

$f(4) = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$, la recta passa pel punt $(4,\ \frac{1}{2})$

$f'(4) = \frac{-81}{324} = -\frac{9}{36} = -\frac{1}{4}$

La recta tangent serà $\boxed{y =} -\frac{1}{4}(x-4) + \frac{1}{2} = \ -\frac{1}{4}x + 1 + \frac{1}{2} = \boxed{-\frac{1}{4}x + \frac{3}{2}}$.

Per a la representació de la funció i de la recta tangent, utilitzem els resultats de l'apartat anterior i es pot complementar amb una petita taula de valors:



Pautes de correcció:

a) 0,25 punts pel domini de la funció.

   0,25 punts per les asímptotes verticals.

   0,25 punts per les asímptotes horitzontals i obliqües.

   0,25 punts per la determinació i la classificació de l'abscissa del màxim relatiu.

   0,25 punts pels intervals de creixement i decreixement.

b) 0,25 punts per la formulació de la recta tangent.

   0,25 punts pel càlcul de la recta tangent.

   0,5 punts per la representació de la gràfica de la funció.

   0,25 punts per la representació de la recta tangent.

3.

Resolució:

a) Per a estudiar el rang de la matriu A, calculem primer el determinant de la matriu per a veure quan té rang màxim:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 3 \\ 2a & 5 & 3a \\ 7 & 4a & 9 \end{vmatrix} = 45 + 24a^2 + 21a^2 - 105 - 12a^2 - 18a^2 = 15a^2 - 60$$

$$15a^2 - 60 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 2$$

Així doncs, se'ns obren els casos següents:

CAS I. $\boxed{\text{Si } a \neq \pm 2,\ rang\ A\ = 3}$, atès que el determinant d'ordre 3 és no nul.

CAS II. $\boxed{\text{Si } a = 2,\ rang\ A\ = 2}$, atès que el determinant d'ordre 3 és nul i hi ha un menor d'ordre 2 no nul ($\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 8 = -3 \neq 0$).

CAS III. $\boxed{\text{Si } a = -2,\ rang\ A\ = 2}$, atès que el determinant d'ordre 3 és nul i hi ha un menor d'ordre 2 no nul ($\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 8 = -3 \neq 0$).

b)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Quan multipliquem les matrius, veiem que es tracta d'un sistema d'equacions lineal i homogeni. Per tant, sempre té com a mínim la solució $(0, 0, 0)$.

Tenim $\begin{cases} x + 2y + 3z & = & 0 \\ 4x + 5y + 6z & = & 0 \\ 7x + 8y + 9z & = & 0 \end{cases}$ amb la matriu ampliada $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 \\ 7 & 8 & 9 & 0 \end{array}\right)$.

Observem que la matriu de coeficients és la matriu A de l'apartat anterior per al valor $a = 2$. Per tant, el rang de la matriu de coeficients és 2.

De tota manera, notem que $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 45 + 96 + 84 - 105 - 48 - 72 = 0$

i $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 5 - 8 = -3 \neq 0$. Per tant, $rang \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = 2$.

El rang de la matriu del sistema i també el rang de la matriu ampliada són 2 (perquè la columna $(0, 0, 0)$ dels termes independents no pot augmentar el $rang(A)$), i el nombre d'incògnites és 3. En virtut del teorema de Rouché-Frobenius, es tracta d'un sistema compatible indeterminat amb 3 – 2 = 1 grau de llibertat.

El menor d'ordre 2 no nul indica les equacions i les incògnites que ens hem de quedar. Per tant:

$$\begin{cases} x + 2y &= -3z \\ 4x + 5y &= -6z \end{cases}$$

Per a trobar x i y en funció de z podem aplicar el mètode de Cramer:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3z & 2 \\ -6z & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-15z + 12z}{-3} = z$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3z \\ 4 & -6z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{-6z + 12z}{-3} = -2z$$

Per tant, les matrius solució demanades són les següents:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ -2z \\ z \end{pmatrix} \quad z \text{ paràmetre.}}$$

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts pel càlcul del determinant.

0,25 punts pel càlcul del valor singular per discutir.

0,75 punts per la discussió (0,25 punts per cada cas).

b) 0,25 punts pel plantejament de l'equació com a sistema d'equacions lineals.

0,25 punts per raonar que és compatible indeterminat amb un grau de llibertat.

0,25 punts per trobar la x en funció de z (o equivalent).

0,25 punts per trobar la y en funció de z (o equivalent).

0,25 punts per l'expressió de la matriu solució X.

4.

Resolució:

a) Per tal que $f(x)$ sigui contínua, com que les dues funcions que defineixen $f(x)$, la logarítmica i la lineal, són contínues en el domini on estan definides respectivament, només ens cal imposar la continuïtat en el valor $x = e$:

$$f(e) = ae + b = \lim_{x\to e} f(x) = \begin{cases} \lim_{x\to e^-} \ln(x) = \ln(e) = 1 \\ \lim_{x\to e^+} (ax + b) = ae + b \end{cases} \Rightarrow ae + b = 1.$$

Per tal que sigui derivable, com que les dues funcions que defineixen la funció $f(x)$, la logarítmica i la lineal, són derivables en el domini on estan definides respectivament, tenim:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \text{ si } x \in (0, e) \\ a \text{ si } x \in (e, 4) \end{cases}.$$

Per tant, només ens cal imposar la derivabilitat a $x = e$.

$$f'(e) = \lim_{x\to e} f'(x) = \begin{cases} \lim_{x\to e^-} \frac{1}{x} = \frac{1}{\mathrm{e}} \\ \lim_{x\to e^+} a = a \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{e}}.$$

I com que $ae + b = 1 \Rightarrow \frac{1}{e} \cdot e + b = 1 \Rightarrow \boxed{b = 0}$.

b) Busquem primer la integral indefinida $\int \frac{x^3}{9x^4+1} dx$.

Multiplicant i dividint adequadament, podem tenir al numerador la funció derivada de la funció que hi ha al denominador:

$$\int \frac{x^3}{9x^4 + 1} dx = \frac{1}{36} \int \frac{36x^3}{9x^4 + 1} dx = \frac{1}{36} \ln(9x^4 + 1) + k.$$

Així que la funció $g(x)$ serà de la forma $g(x) = \frac{1}{36} \ln(9x^4 + 1) + k$.

Finalment, per a trobar k, apliquem que la funció que busquem ha de passar pel punt $(0, \ -1)$.

$$g(0) = \frac{1}{36} \ln(9 \cdot 0^4 + 1) + k = \frac{1}{36} \ln(1) + k = 0 + k = k$$

Per tant, tenim que, si $g(0) = -1$, aleshores $k = -1$.

Així, $\boxed{g(x) = \frac{1}{36} \ln(9x^4 + 1) - 1}$.

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts per l'argument de continuïtat a partir de les funcions que hi intervenen.

   0,25 punts per l'equació de continuïtat.

   0,25 punts per l'argument de derivabilitat a partir de les funcions que hi intervenen.

   0,25 punts per l'equació de derivabilitat.

   0,25 punts pels valors de a i de b.

b) 0,25 punts pel plantejament del càlcul de la primitiva.

   0,5 punts pel càlcul de la integral indefinida.

   0,5 punts pel càlcul de la constant d'integració.

5.

Resolució:

a) La matriu A serà invertible si i només si el seu determinant és diferent de zero.

Busquem el determinant aplicant la regla de Sarrus, per tal de saber per a quins valors del paràmetre a aquest determinant no s'anul·la:

$$\begin{aligned}|A| = \begin{vmatrix} a & a & 0 \\ 2 & a+1 & a-1 \\ 2a+1 & 0 & -a-3 \end{vmatrix} &= a(a+1)(-a-3) + a(a-1)(2a+1) - 0 - 0 + 2a(a+3) \\ &= a(-a^2-4a-3+2a^2+a-2a-1+2a+6) = a(a^2-3a+2).\end{aligned}$$

Quan resolem $|A| = 0$, obtenim $a = 0$ i $a = \frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2} = \frac{3\pm1}{2} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1. \\ a = 2 \end{cases}$

$\boxed{\text{La matriu A serà invertible quan } a \neq 0, 1, 2.}$

b) Quan *a* =*3*, tenim $A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 2 \\ 7 & 0 & -6 \end{pmatrix}$ i $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Mirem si la matriu A és invertible. En cas afirmatiu, calculem la inversa.

Observació: per l'apartat anterior, com que $a = 3$, ja sabríem que la matriu té inversa.

$|A| = -72 + 42 + 36 = 6 \neq 0 \Rightarrow$ la matriu A és invertible.

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -24 & 18 & 6 \\ 26 & -18 & -6 \\ -28 & 21 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ \frac{13}{3} & -3 & -1 \\ -\frac{14}{3} & \frac{7}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

Plantejament de la resolució de l'equació:

$$A \cdot X = B - 3I \quad \rightarrow \quad A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (B - 3I) \quad \rightarrow \quad X = A^{-1} \cdot (B - 3I)$$

$$B - 3I = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalment, obtenim X:

$$X = A^{-1} \cdot (B - 3I) \;\rightarrow\; X = A^{-1} \cdot I \;\rightarrow\; \boxed{X = A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ \frac{13}{3} & -3 & -1 \\ -\frac{14}{3} & \frac{7}{2} & 1 \end{pmatrix}}.$$

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts per la condició d'invertibilitat a partir del determinant no nul.

0,5 punts pel càlcul del determinant.

0,25 punts pels valors que anul·len el determinant.

0,25 punts per la resposta al problema.

b) 0,25 punts per concloure que la matriu A és invertible.

0,5 punts pel càlcul de la matriu inversa.

0,25 punts per les operacions matricials.

0,25 punts pel resultat final.

6.

Resolució:

a)

Considerem els tres punts de la imatge: $A = (2,0,2)$, $B = (0,2,1)$ i $C = (0,0,h)$.

$$d(A,C) = \sqrt{2^2 + (2-h)^2} = \sqrt{4+4-4h+h^2} = \sqrt{h^2-4h+8}$$

$$d(B,C) = \sqrt{2^2 + (1-h)^2} = \sqrt{4+1-2h+h^2} = \sqrt{h^2-2h+5}$$

Per tant, efectivament, $\boxed{L(h) = \sqrt{h^2-4h+8} + \sqrt{h^2-2h+5}}$.

b)

Per a trobar el valor mínim, derivem la funció $L(h)$ i en trobem els punts singulars:

$$L'(h) = \frac{2h-4}{2\sqrt{h^2-4h+8}} + \frac{2h-2}{2\sqrt{h^2-2h+5}} = \frac{h-2}{\sqrt{h^2-4h+8}} + \frac{h-1}{\sqrt{h^2-2h+5}}.$$

Quan fem $L'(h) = 0$: $\frac{h-2}{\sqrt{h^2-4h+8}} + \frac{h-1}{\sqrt{h^2-2h+5}} = 0$

$\frac{h-2}{\sqrt{h^2-4h+8}} = -\frac{h-1}{\sqrt{h^2-2h+5}} \Rightarrow (h-2)\sqrt{h^2-2h+5} = -(h-1)\sqrt{h^2-4h+8}$

Si elevem els dos termes de la igualtat al quadrat, obtenim:

$$(h-2)^2(h^2-2h+5) = (h-1)^2(h^2-4h+8)$$

D'on:

$$(h^2-4h+4)(h^2-2h+5) = (h^2-2h+1)(h^2-4h+8)$$

$$h^4 - 2h^3 + 5h^2 - 4h^3 + 8h^2 - 20h + 4h^2 - 8h + 20 =$$

$$= h^4 - 4h^3 + 8h^2 - 2h^3 + 8h^2 - 16h + h^2 - 4h + 8$$

Operant, obtenim $8h = 12$ i, per tant, $h = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$.

Per a comprovar que aquest valor correspon al mínim, n'hi ha prou observant el signe de la derivada abans i després d'aquest valor dins del domini del context de la funció. Per exemple, podem verificar que la derivada és negativa abans d'aquest valor, per exemple per a $x = 1$, ($L'(1) = -\frac{1}{\sqrt{5}} < 0$), i positiva després d'aquest valor, per exemple, per a $x = 2$, ($L'(2) = \frac{1}{\sqrt{5}} > 0$).

Per tant, la longitud mínima del cable s'aconsegueix quan $\boxed{C = (0,0,\frac{3}{2})}$.

I la longitud mínima serà:

$$\boxed{L\left(\frac{3}{2}\right) =} \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{3}{2}\right) + 8} + \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{3}{2}\right) + 5} = \sqrt{\frac{9}{4} - 6 + 8} + \sqrt{\frac{9}{4} - 3 + 5}$$

$$= \sqrt{\frac{9}{4} + 2} + \sqrt{\frac{9}{4} + 2} = 2\sqrt{\frac{17}{4}} = \boxed{\sqrt{17}\text{ unitats de longitud}}.$$

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts per l'expressió d'una de les distàncies.

0,25 punts per l'expressió de l'altra distància.

0,25 punts per l'expressió final $L(h)$.

b) 0,5 punts per la derivada de la funció $L(h)$.

0,5 punts pel càlcul del valor singular i el punt C.

0,25 punts per la classificació del valor singular com a mínim.

0,5 punts pel càlcul de la longitud mínima.