Sèrie 1

Criteris generals per a la correcció:

1. En tots els casos la resolució que fa l'estudiant s'ha de poder seguir i comprendre els passos que fa. Aquelles respostes, parcials o totals, que no estiguin desenvolupades o no es pugui seguir el com s'ha arribat a donar la resolució seran puntuades amb 0 punts.

2. La resolució proposada és, en alguns casos, una de les possibles i no és, en principi, única. Per tant, sempre que l'enunciat ho permeti, en el cas que l'estudiant respongui amb una resolució alternativa totalment correcta se li assignarà el total de puntuació de l'apartat. Si la resposta és parcial la puntuació obtinguda serà proporcional a la part corresponent de la puntuació total.

3. En alguns casos, la solució final pot admetre expressions equivalents. En aquests casos la puntuació serà la totalitat de la puntuació de l'apartat.

4. Tots els exercicis, apartats i passos dins d'un apartat es valoraran amb múltiples de 0,25 punts.

5. Penalització per errades de càlcul o transcripció:

6. Si l'errada que es comet no té més transcendència, aleshores NO es descomptarà res de la puntuació parcial de l'apartat.

7. En el cas que l'errada condueixi a derivacions paral·leles de l'enunciat, es valorarà i puntuarà el desenvolupament i coherència de la resolució resultant, i només s'aplicarà una penalització final de 0,25 punts.

8. En cas que l'errada condueixi a no tenir sentit alguna de les qüestions que es demanen, aleshores la puntuació màxima de l'apartat serà de 0,75 punts.

9. Si la resolució d'un apartat conté dues errades la puntuació de l'apartat serà l'acumulada fins al moment previ al cometre la segona errada.

1.

Resolució:

Si calculem les funcions derivades successives tenim:

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $\quad f''(x) = 6ax + 2b$

Si anem traduint en termes de *f* i *f'* les condicions de l'enunciat obtenim:

* *f* passa per (1,0) → $f(1) = 0$ → a + b + c + d = 0 (equació 1)

* (1,0) és un punt d'inflexió → $f''(1) = 0$ → $6a + 2b = 0$ (equació 2)

* El pendent de la tangent en *x* = *1* és igual a –3 → $f'(1) = -3$ →
$3a + 2b + c = -3$ (equació 3)

* *f* té un extrem en $x = 0$ → $f'(0) = 0$ → c = 0 (equació 4)

Resolent el sistema format per les equacions (1), (2), (3) i (4), obtenim la solució al problema $\boxed{a = 1, b = -3, c = 0, d = 2}$.

Pautes de correcció:

0,5 punts per la traducció de cadascuna de les quatre condicions.

0,5 punts per la resolució final del sistema.

2.

Resolució:

a)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} = A$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = B$$

Observació: la resolució es donarà per bona encara que no apareguin els càlculs intermedis.

b) Sabem que $(*)\ C \cdot D = C$ i $(**)\ D \cdot C = D$

$$C^2 = C \cdot C \underbrace{=}_{(*)} (C \cdot D) \cdot C = C \cdot (D \cdot C) \underset{(**)}{=} C \cdot D \underbrace{=}_{(*)} C$$

$$D^2 = D \cdot D \underbrace{=}_{(**)} (D \cdot C) \cdot D = D \cdot (C \cdot D) \underset{(*)}{=} D \cdot C \underbrace{=}_{(**)} D$$

I, per tant, efectivament les dues matrius C i D són idempotents.

Pautes de correcció:

a) 0,75 punts pel càlcul del producte A·B.

0,75 punts pel càlcul del producte B·A.

b) 0,5 punts per la comprovació que la matriu C és idempotent.

0,5 punts per la comprovació que la matriu D és idempotent.

3.

Resolució:

a) Integrant $f(x) = \begin{cases} \int (x-1)dx & \text{si } x < 2 \\ \int \frac{1}{x-1}dx & \text{si } x > 2 \end{cases} \rightarrow f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x + k & \text{si } x < 2 \\ \ln|x-1| + k' & \text{si } x > 2 \end{cases}$

Trobem els valors de les constants k i k':

- $f(x)$ passa pel punt $A = (0,3)$, per tant, $\frac{1}{2}0^2 - 0 + k = 3 \rightarrow k = 3$.
- Com que $f(x)$ és derivable, llavors és contínua, així que ho és en el punt d'abscissa 2 i, per tant, els límits laterals de la funció $f(x)$ en 2 han de coincidir:

$$\frac{1}{2}2^2 - 2 + 3 = \ln|2-1| + k'$$

$$k' = 3.$$

Per tant, la funció $f(x)$ serà $\boxed{f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 - x + 3 & si\ x \le 2 \\ \ln|x-1| + 3 & si\ x > 2 \end{cases}}$

Observació: es puntuarà per igual l'expressió $\ln|x-1|$ que l'expressió $\ln(x-1)$.

Apliquem l'equació de la recta tangent a una funció $g(x)$ en el punt d'abscissa a:

$$y - g(a) = g'(a) \cdot (x - a)$$

Ara la funció és f' és $g(x) = \begin{cases} x - 1 & si\ x \le 2 \\ \frac{1}{x-1} & si\ x > 2 \end{cases}$ i $a = 3$.

Cal trobar $g'(x), g'(3)$ i $g(3)$:

$$g'(x) = f''(x) = \begin{cases} 1 & si\ x < 2 \\ \frac{-1}{(x-1)^2} & si\ x > 2 \end{cases}, \qquad g'(3) = -\frac{1}{4}, \qquad g(3) = \frac{1}{2}$$

$$y - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} \cdot (x - 3) \quad \rightarrow \boxed{y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}}$$

Pautes de correcció:

a) 0,5 punts pel càlcul de les primitives.

0,25 punts pel càlcul de la constant *k*.

0,5 punts per argumentar la continuïtat de la funció *f.*

0,25 punts pel càlcul de la constant *k'.*

b) 0,25 punts per la fórmula de la recta tangent.

0,25 punts pel càlcul de $f''(x) = g'(x)$.

0,25 punts pel càlcul de $g(3)$ i de $g'(3)$.

0,25 punts pel càlcul final de la recta tangent.

4.

Resolució:

a) Estudi del sistema d'equacions lineals segons els valors del paràmetre λ.

$$M|\overline{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2\lambda & 2+\lambda & 0 \\ 2+\lambda & 1 & 2\lambda & 3 \\ 2\lambda & 2+\lambda & 1 & -3 \end{array}\right)$$

Calculem el determinant de la matriu del sistema i estudiem per a quins valors el determinant s'anul·la.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2\lambda & 2+\lambda \\ 2+\lambda & 1 & 2\lambda \\ 2\lambda & 2+\lambda & 1 \end{vmatrix} = 9\lambda^3 + 9 = 9(\lambda^3 + 1)$$

Quan resolem l'equació $9(\lambda^3 + 1) = 0$, obtenim $\lambda^3 = -1$ i d'aquí $\lambda = -1$.

Per tant, tenim dos casos a discutir.

CAS I: $\boldsymbol{\lambda \neq -1}$

Com que $|M| \neq 0$, aleshores $Rang\ M = 3 = Rang\ \overline{M} = \text{Nombre d'incògnites}$.

En virtut del teorema de Rouché-Frobenius, es tracta d'un sistema compatible determinat (SCD) i, per tant, el sistema té una única solució.

CAS II: $\boldsymbol{\lambda = -1}$

$$M|\overline{M} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

Com que $|M| = 0$, aleshores $Rang\ M < 3$, però en tenir $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 3 = 3 \neq 0$, aleshores $Rang\ M = 2$.

D'altra banda, si orlem l'anterior menor, $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -3 + 12 - 3 - 6 = 0$, per tant, $Rang\ \overline{M} = 2$.

Aleshores, com que $Rang\ M = 2 = Rang\ \overline{M} < \text{Nombre d'incògnites} = 3$, es tracta d'un sistema compatible indeterminat (SCI) amb 1 (3-2) grau de llibertat.

Observació: de forma alternativa, el primer determinant es podria haver calculat utilitzant les propietats dels determinants.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2\lambda & 2+\lambda \\ 2+\lambda & 1 & 2\lambda \\ 2\lambda & 2+\lambda & 1 \end{vmatrix} \underbrace{=}_{(*)} \begin{vmatrix} 1 & 2\lambda & 2+\lambda \\ 2+\lambda & 1 & 2\lambda \\ 3+3\lambda & 3+3\lambda & 3+3\lambda \end{vmatrix} = (3+3\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 2\lambda & 2+\lambda \\ 2+\lambda & 1 & 2\lambda \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3(1+\lambda)\begin{vmatrix} 1 & 2\lambda & 2+\lambda \\ 2+\lambda & 1 & 2\lambda \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3(1+\lambda)(3\lambda^2-3\lambda+3) = 9(1+\lambda)(\lambda^2-\lambda+1)$$

$(*)$ $Sumant\ a\ la\ tercera\ fila\ les\ dues\ primeres\ files.$

b)

Estudiem el cas $\lambda = -1$.

Sabem que es tracta d'un SCI amb un grau de llibertat i el menor d'ordre 2 no nul indica les equacions i les incògnites que ens hem de quedar:

$$\begin{cases} x - 2y &= -z \\ x + y &= 3 + 2z \end{cases}$$

Ara podem resoldre aplicant el mètode de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -z & -2 \\ 3+2z & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3z+6}{3} = z+2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -z \\ 1 & 3+2z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{3+3z}{3} = z+1$$

Solució: $\boxed{(\ x = z+2\ ,\ \ y = z+1,\ \ z\ \ \text{paràmetre}\ )}$

Interpretació geomètrica: cadascuna de les equacions és un pla a $\mathbb{R}^3$. El fet que la solució tingui un grau de llibertat ens indica que aquests tres plans es tallen en una recta, que és la formada per punts de la forma $(z+2, z+1, z)$.

Com que $(z+2, z+1, z) = (2,1,0) + z(1,1,1)$, la recta intersecció és la que passa pel punt $(2,1,0)$ i té vector director $(1,1,1)$.

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts per l'expressió de les matrius del sistema.

0,25 punts pel càlcul del determinant.

0,25 punts per tenir el punt singular que anul·la el determinant.

0,25 punts per la discussió del cas $\lambda \neq -1$.

0,25 punts per la discussió del cas $\lambda = -1$.

b) 0,25 punts per la identificació del tipus de solució.

0,25 punts per la resolució de les incògnites *x* i *y* (o les que escaigui).

0,25 punts per l'expressió de la solució del sistema.

0,25 punts per indicar que els tres plans es tallen en una recta.

0,25 punts per identificar la recta solució.

5.

Resolució:

a) El tancat té forma de rectangle. Anomenem x a la base del rectangle i y a l'altura. Sabem que l'àrea del tancat és $8\ m^2$, per tant, podem escriure:

$$x \cdot y = 8$$

Aïllant tenim que $y = \frac{8}{x}$.

El cost del tancat és $C(x, y) = 2{,}5 \cdot (2y + x)$. Substituint obtenim:

$$C(x) = 2{,}5 \cdot \left(2\frac{8}{x} + x\right) = 2{,}5 \cdot \left(\frac{16 + x^2}{x}\right)$$

Per calcular el cost mínim, calcularem els extrems relatius de la funció $C(x)$, a partir de la primera derivada i igualant-la a 0:

$$C'(x) = 2{,}5 \cdot \left(\frac{2x \cdot x - (16 + x^2) \cdot 1}{x^2}\right) = 2{,}5 \cdot \left(\frac{x^2 - 16}{x^2}\right)$$

$$2{,}5 \cdot \left(\frac{x^2 - 16}{x^2}\right) = 0$$

$$x = \pm 4$$

Pel context del problema, només té sentit la solució positiva. Per comprovar si en $x = 4$ hi ha un mínim, calculem la segona derivada i observem el signe:

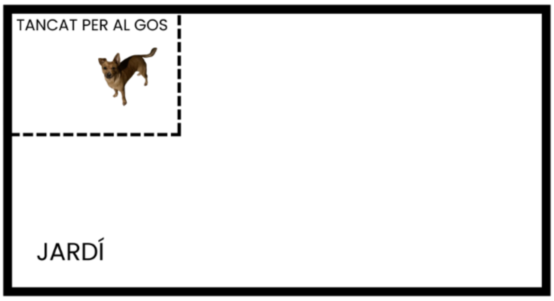
$$C''(x) = 2{,}5 \cdot \left(\frac{2x \cdot x^2 - (x^2 - 16) \cdot 2x}{x^4}\right) = 2{,}5 \cdot \left(\frac{2x^3 - (2x^3 - 32x)}{x^4}\right) = 2{,}5 \cdot \frac{32}{x^3}.$$

Com que $C''(4) > 0$, en $x = 4$ hi ha un mínim.

Per tant, les dimensions del tancat seran de $\boxed{4\ m \text{ de base i } 2\ m \text{ d'altura}}$.

El cost serà: $C(4) = 2{,}5 \cdot \left(\frac{16+4^2}{4}\right) = \boxed{20€}$

b) Per estalviar amb la tanca, podem posar el tancat a una cantonada del jardí:



Ara podem reproduir els càlculs fets a l'apartat *a*, amb la nova situació.

En aquest cas, el cost del tancat és $C(x,y) = 2{,}5 \cdot (y + x)$. Com que $y = \frac{8}{x}$:

$$C(x) = 2{,}5 \cdot \left(\frac{8}{x} + x\right) = 2{,}5 \cdot \left(\frac{8 + x^2}{x}\right)$$

Calculant la primera derivada i igualant-la a 0:

$$C'(x) = 2{,}5 \cdot \left(\frac{2x \cdot x - (8 + x^2) \cdot 1}{x^2}\right) = 2{,}5 \cdot \left(\frac{x^2 - 8}{x^2}\right)$$

$$2{,}5 \cdot \left(\frac{x^2 - 8}{x^2}\right) = 0$$

$$x = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$$

Anàlogament, l'única solució que té sentit és la positiva. Per comprovar si en $x = 2\sqrt{2}$ hi ha un mínim, calculem la segona derivada i observem que el seu signe és positiu:

$$C''(x) = 2{,}5 \cdot \left(\frac{2x \cdot x^2 - (x^2 - 8) \cdot 2x}{x^4}\right) = 2{,}5 \cdot \left(\frac{2x^3 - (2x^3 - 16x)}{x^4}\right) = 2{,}5 \cdot \frac{16}{x^3}$$

Com que $C''(2\sqrt{2}) > 0$, en $\boxed{x = 2\sqrt{2}}$ hi ha un mínim.

L'altura del tancat serà $\boxed{y = \frac{8}{2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}}$.

Per tant, el tancat tindrà forma quadrada de costat $2\sqrt{2} \approx 2{,}83\ m$.

En aquest cas el preu mínim serà

$$C(2\sqrt{2}) = 2{,}5 \cdot \left(\frac{8 + (2\sqrt{2})^2}{2\sqrt{2}}\right) = 2{,}5 \cdot \frac{16}{\sqrt{8}} = 2{,}5 \cdot 2\sqrt{8} = 14{,}14€$$

Per tant, tindríem un estalvi de 20 –14,14 = $\boxed{5{,}86\ €}$

Observació: qualsevol altra argumentació correcta serà considerada vàlida, encara que no es faci servir càlcul diferencial per arribar a la resposta, sempre que s'argumenti amb càlculs matemàtics.

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts per l'assignació de les variables i la lligadura d'igualtat de l'àrea.

0,25 punts per la funció cost.

0,25 punts per la derivada primera.

0,25 punts per l'abscissa del punt singular.

0,25 punts per argumentar que es tracta d'un mínim.

0,25 punts per les dimensions finals i el cost mínim.

Observació: a l'hora de trobar el punt singular es pot utilitzar la funció $C(x)$ o bé la funció $f(x)=\frac{16+x^2}{x}$.

b) 0,25 punts per situar el tancat correctament.

0,25 punts per la funció cost i la seva derivada.

0,25 punts per les dimensions i la justificació d'un mínim.

0,25 punts pel càlcul de l'estalvi.

6.

Resolució:

a) Com que el pla buscat és perpendicular a π_1 i π_2, els seus vectors directors seran els vectors normals de π_1 i π_2: $\overrightarrow{v_1} = (1,1,0)$ i $\overrightarrow{v_2} = (1,0,-1)$.

Trobem l'equació general del pla amb vectors directors $\overrightarrow{v_1}$ i $\overrightarrow{v_2}$ i que passa pel punt $P = (4,1,2)$, en què $X(x,y,z)$ és un punt genèric del pla:

$$\begin{vmatrix} x-4 & 1 & 1 \\ y-1 & 1 & 0 \\ z-2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \boxed{x - y + z - 5 = 0}$$

b) Busquem la solució del sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - z = -2 \end{cases}$. Aïllant obtenim:

$$\begin{matrix} y = 3 - x \\ z = 2 + x \end{matrix} \rightarrow Si\ x = \lambda, \text{ tenim: } \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases}$$

La recta buscada en forma vectorial és:

$$\boxed{r: (x,y,z) = (0,3,2) + \lambda \cdot (1,-1,1), \lambda \in \mathbb{R}}$$

c)

Trobem l'equació del pla perpendicular a la recta r i que passa pel punt P. Aquest és el pla que ens han demanat en l'apartat *a*: $x - y + z - 5 = 0$.

En cas que no ens adonem que ja tenim el pla d'un apartat anterior, aquest pla tindrà com a vector normal el vector director de la recta. Per tant, serà de la forma:

$x - y + z + D = 0.$

Imposem que P estigui contingut en el pla: $4 - 1 + 2 + D = 0 \rightarrow D = -5$.

Ara hem de calcular el punt de tall de la recta L i el pla:

$$\begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 - \lambda \\ z = 2 + \lambda \end{cases} \text{ i } x - y + z = 5 \rightarrow \lambda - (3 - \lambda) + (2 + \lambda) = 5 \rightarrow \lambda = 2$$

Substituint $\lambda = 2$ en les equacions paramètriques de la recta obtenim el punt : $\boxed{Q = (2,1,4)}$.

De forma alternativa:

El punt Q és la projecció ortogonal del punt P sobre la recta r, ja que és el punt que està a menor distància de P.

Sigui Q un punt genèric de la recta r: $Q = (\lambda, 3-\lambda, 2+\lambda)$ i $\vec{v} = (1, -1, 1)$ el vector director de L.

Per la condició d'ortogonalitat tenim que $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{v} = 0$:

$$(-4+\lambda, 2-\lambda, \lambda) \cdot (1, -1, 1) = 0 \rightarrow -4+\lambda - 2+\lambda+\lambda = 0 \rightarrow \lambda = 2$$

Substituint $\lambda = 2$ al punt genèric Q obtenim les coordenades del punt: $\boxed{Q = (2, 1, 4)}$.

Pautes de correcció:

a) 0,25 punts pels vectors directors.

0,25 punts per indicar com trobar el pla.

0,25 punts pel càlcul de l'equació.

b) 0,25 punts per formular la resolució del sistema.

0,5 punts per trobar l'equació.

c) 0,25 punts per indicar que el punt buscat és la projecció ortogonal.

0,25 punts pel punt genèric / per plantejar el sistema entre el pla i la recta.

0,25 punts pel producte escalar / per resoldre el sistema.

0,25 punts per trobar el punt.